Astronomie.

# Untersuchungen über benachbarte Gleichgewichtsfiguren

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Bonn.

Vorgelegt von

Wilhelm Trippe

aus Dortmund.

BONN 1938

L. Neuendorff, Bonn, Kaiserstr. 42

Berichterstatter:

Professor *Dr. Kohlschütter*
Dozent *Dr. Rehbock*

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

## Inhaltsverzeichnis.


1. Einleitung. Seite

Formulierung des Existenztheorems . . . . . 5

2. Skizzierung eines Beweises unter Beschränkung auf eine erste Näherung.

a) Aufstellung einer Integralgleichung . . . . . 13

b) Diskussion der Integralgleichung . . . . . 18

c) Die Poincaré'schen Bedingungsgleichungen für die den Ellipsoiden benachbarten Gleichgewichtsfiguren 26

3. Vollständige Reihenentwicklung der Potentialdifferenz $V_1 - V$.

a) Berechnung der Entwicklungskoeffizienten . . . . 32

b) die Frage der Konvergenz . . . . . 38

Reihenentwicklung für $V_1 - V$ nach Schwarzschild. — Die Fundamentalgleichung . . . . . 39

4. Diskussion der Fundamentalgleichung.

a) Aus einer einzelnen vorgegebenen Gleichgewichtsfigur eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren abzuleiten . . . . . 45

b) Aus einer einzelnen vorgegebenen Gleichgewichtsfigur neue Reihen von Gleichgewichtsfiguren abzuleiten . . . . . 47

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546405_0086

## 1.

## Einleitung.

Bevor wir die Aufgabe der Theorie der Gleichgewichtsfiguren formulieren, schicken wir zwei Bemerkungen voraus:

1. Bemerkung über den Begriff des Gleichgewichts.

Wenn im folgenden vom Gleichgewicht die Rede ist, so handelt es sich immer um das relative Gleichgewicht, in dem sich eine gleichförmig rotierende Flüssigkeit zu einem mit ihr rotierenden Koordinatensystem befindet.

2. Bemerkung über die Wahl der Einheiten.

Man denke sich die drei Grundeinheiten so gewählt, daß die vorgegebene homogene Flüssigkeit die Dichte 1 hat und daß zugleich die Gravitationskonstante gleich 1 wird.

### Die Aufgabe:

Eine allgemeine Theorie des Gleichgewichts einer homogenen gleichmäßig rotierenden Flüssigkeit, deren Teilchen sich nach dem Gesetz von Newton anziehen, hat folgende zwei Fragen zu beantworten:

1. Welche Gleichgewichtsfiguren kann die Flüssigkeit annehmen?
2. Welche unter diesen Gleichgewichtsfiguren sind stabil?

Die erste Frage heiße die Existenzfrage, die zweite die Stabilitätsfrage. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die Behandlung der ersteren.

Die Hydrostatik beweist, daß im Fall des Gleichgewichts die Niveauflächen Flächen gleichen Druckes und gleicher Dichte sind. Da auf der freien Oberfläche der zu betrachtenden Flüssigkeit Dichte und Druck konstant sind — der Druck ist sogar

Null — so ist die freie Oberfläche eine Niveaufläche. Wir führen ein körperfestes Koordinatensystem ein, wobei wir die Rotationsachse zur $z$-Achse machen. Die konstante Winkelgeschwindigkeit nennen wir $\omega$. Das Potential der Zentrifugalkraft ist dann $\frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)$. Das Potential der Gravitationskraft $V(x, y, z)$ wird bekanntlich definiert durch ein dreifaches Integral

$$V(x, y, z) = \int \frac{d\tau'}{r},$$

wo $d\tau'$ ein Volumelement und $r$ die Entfernung zwischen diesem Volumelement und der Stelle, an welcher das Potential zu berechnen ist, bezeichnet. Auf der freien Oberfläche muß

$$\text{(A)} \qquad \int \frac{d\tau'}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.} = C$$

sein. Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Gleichung de Oberfläche, die wir in der Form

$$\text{(1)} \qquad F(x, y, z) = 0$$

annehmen, zu bestimmen. Da zur Berechnung des Potentials die Gleichung der freien Oberfläche bereits bekannt sein müßte so ist ihre Ermittelung aus der Gleichgewichtsbedingung ($A$) nicht möglich. Eine andere oft erwähnte mathematische Formulierung der Aufgabe findet man, indem man die Bedingungsgleichung ($A$) in der differentiellen Form schreibt

$$dV + \omega^2 (x\,dx + y\,dy) = 0$$

und sie dann vergleicht mit dem totalen Differential von (1)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0;$$

man erhält die zu diskutierenden Beziehungen

$$\text{(2)} \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Mit dieser Reduktion (2) ist natürlich die Schwierigkeit keineswegs behoben. Appell hat die Gleichungen (*A*) und (1) mittels eines von Dirichlet stammenden Kunstgriffes zusammengefaßt in eine Integralgleichung für die zu bestimmende Funktion $F(x, y, z)$. Das Integralzeichen, unter dem die unbekannte Funktion darin vorkommt, ist über den ganzen Raum zu erstrecken. Aber dennoch ist bei genauerer Betrachtung diese Integralgleichung sehr kompliziert. Neben der Gleichgewichtsbedingung (*A*) führen wir noch eine zweite zur Stabilitätsfrage überleitende Gleichgewichtsbedingung an, und zwar erhält man diese, wenn man aus der Mechanik das folgende Theorem heranzieht: Die aus einer virtuellen Verschiebung resultierende Arbeit ist im Fall des Gleichgewichts Null. Diese Arbeit setzt sich zusammen aus der Arbeit der Gravitation und aus der der Zentrifugalkraft. Da die potentielle Energie der Flüssigkeitsmenge den Wert

$$\int \frac{V}{2} \, d\tau = W$$

hat und die Rotationsenergie gleich

$$\frac{1}{2} \omega^2 \int (x^2 + y^2) \, d\tau = \frac{1}{2} \omega^2 J$$

ist, wo $J$ das Trägheitsmoment bedeutet, so ist im Fall des Gleichgewichts

$$\delta \left( W + \frac{\omega^2}{2} J \right) = 0 \tag{B}$$

für jede mit den Gleichgewichtsbedingungen verträgliche Verrückung. Nun stellt der Klammerausdruck die totale Energie der Flüssigkeitsmasse dar, also hat im Fall des Gleichgewichts die Gesamtenergie einen stationären Wert. Dies ist die zweite Gleichgewichtsbedingung mit der in Gleichung (*B*) vorliegenden mathematischen Formulierung. Eine spezielle Untersuchung über die Art des Extremums führt hinüber zur Stabilitätsfrage. Wir haben diese zweite Gleichgewichtsbedingung angeführt, weil sehr viele

unter den die Theorie der Gleichgewichtsfiguren behandelnden Arbeiten, insbesondere die bekannten Untersuchungen von Poincaré [1]) und Schwarzschild [2]), Existenz- und Stabilitätsfrage zugleich behandeln und sie deshalb ihren Ausgang nehmen von der zweiten Gleichgewichtsbedingung, also der Gleichung (*B*).

Wir bemerken hier noch, daß auch die zweite Bedingung sich ebenfalls nicht zur Bestimmung der Gleichung der Oberfläche verwerten läßt, da die beiden Energieintegrale über das von der Flüssigkeit eingenommene Volumen zu erstrecken sind.

Da also eine direkte Bestimmnng der Gleichung der Oberfläche nicht möglich ist, so ist es ganz natürlich, daß man einen indirekten Weg einschlägt, indem man solche Massenanordnungen betrachtet, deren Formen geometrisch leicht zu beschreiben sind und deren Potential daher verhältnismäßig einfach zu berechnen ist, und nun hinterher prüft, ob die Bedingung (*A*) erfüllt ist. So sind Maclaurin und Jacobi vorgegangen, und ihre Untersuchungen sind nur Verifikationen, daß Ellipsoide Gleichgewichtsfiguren sein können. An ihre Ergebnisse haben sich nun gewisse Fragen geknüpft, deren Beantwortung die allgemeine Lösung der Existenzfrage wesentlich gefördert haben. Es ist daher angebracht, auf diese speziellen Lösungen unserer Aufgabe etwas näher einzugehen.

### *Die Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide.*

Die Ereignisse, zu denen Maclaurin und Jacobi gelangt sind, lassen sich sehr übersichtlich darstellen mit Hilfe des von Poincaré geprägten Begriffs der linearen Reihe. Für irgendein mechanisches System, dessen Lage durch *n*-Koordinaten festgelegt werde, kann es eine Schar von Gleichgewichtskonfigurationen

---

[1]) H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Act. math. VII (1885)

[2]) K Schwarzschild, die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen, rotierenden Flüssigkeitsmasse. Annalen der Sternwarte München III (1896).

geben, in der die Koordinaten von einem einzigen variablen Parameter abhängen. Jede Gleichgewichtskonfiguration wird dann dargestellt durch einen Punkt einer Kurve im $n$-dimensionalen Raum. Diese Kurve nennt Poincaré eine lineare Reihe. In dem besonderen Fall des Gleichgewichts einer rotierenden Flüssigkeit ist die Anzahl $n$ unendlich groß, die Rolle des variablen Parameters übernimmt die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ bzw. das Rotationsmoment $R = \omega . J$. Zur Darstellung der Gleichgewichtsfiguren einer Flüssigkeitsmasse durch lineare Reihen müßte man sich daher des unendlichdimensionalen Raumes bedienen. Nun ist aber ein Ellipsoid von vorgegebenem Volumen eindeutig festgelegt durch die Achsenverhältnisse oder, was dasselbe ist, durch die Quadrate dieser Achsenverhältnisse. Bezeichnen wir mit $a$ die große, $b$ die mittlere und $c$ die kleine Achse des Ellipsoids, so sind auf Grund der Untersuchungen von Maclaurin und Jacobi die Größen

$$x = \frac{c^2}{a^2}$$

$$y = \frac{c^2}{b^2}$$

stetige und reelle Funktionen von $\omega$ für $0 \leqq \omega^2 \leqq 4\pi\, 0.09$ im Fall der Rotationsellipsoide bzw. für $0 \leqq \omega^2 \leqq 4\pi\, 0.11$ im Fall der dreiachsigen Ellipsoide. Stellt man diese Funktionen $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$ in der $x,y$-Ebene graphisch dar, so erhält man als Repräsentanten für die Rotationsellipsoide die Punkte auf einem Stück der Winkelhalbierenden $y = x$ und für die Ellipsoide mit drei ungleichen Achsen die Punkte auf einer dazu symmetrischen Kurve (s. Fig. 1).

Dem Punkt $A$ entspricht die Kugel, da für sie die beiden Verhältnisse gleich 1 sind. Eine besondere Bedeutung kommt dem Punkte $B$ zu. Das diesem Punkte entsprechende Ellipsoid gehört den beiden linearen Reihen zugleich an, oder in $B$ zweigt von der Reihe der Rotationsellipsoide eine neue Reihe von Gleich-

gewichtsfiguren ab, nämlich die der Jacobischen Ellipsoide. Es ist nun sinnvoll zu fragen, ob es neben diesem sogen. Verzweigungsellipsoid *B* noch weitere Verzweigungellipsoide in der Reihe der Rotationsellipsoide gibt, von denen dann lineare Reihen neuer nichtellipsoidaler Gleichgewichtsfiguren abzweigen müssen. Dieselbe Frage kann man natürlich in Bezug auf die Reihe der dreiachsigen Ellipsoide stellen. Dem Punkte *B* kommt innerhalb der Reihe der Jacobischen Ellipsoide insofern noch

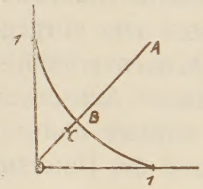



Fig. 1. Die linearen Reihen der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide.

eine weitere Bedeutung zu, als er nämlich das mit der größten Winkelgeschwindigkeit rotierende Jacobische Ellipsoid darstellt. Wir nennen ein solches Ellipsoid ein Grenzellipsoid. Hinsichtlich der Rotationsellipsoide gibt es natürlich auch eine Grenzform, in der Figur mit *C* bezeichnet. An dieser Stelle führen wir einige allgemeine Bezeichnungen ein. Eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rotierende beliebige Gleichgewichtsfigur, an die sich sowohl für wachsendes als auch für abnehmendes $\omega$ eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren anschließt, nennen wir „regulär“ (in der Bezeichnungsweise von Schwarzschild „ordinär“), eine Gleichgewichtsfigur, für die das nicht der Fall ist, die also zwei oder mehreren linearen Reihen angehört, soll „singulär“ heißen. Eine singuläre Gleichgewichtsfigur ist z. B. das Verzweigungsellipsoid *B*. Eine singuläre Gleichgewichtsfigur ist aber auch das Grenzellipsoid *C*. Zur besseren Charakterisierung einer solchen Figur führt Schwarzschild eine neue, sehr an-

schauliche Bezeichnung ein. Er bezeichnet nämlich eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die von einer singulären Figur ausgeht und sich in Bezug auf $\omega$ nur in einer Richtung erstreckt, einen „Arm von Gleichgewichtsfiguren".

Ausgehend von den Fragestellungen, die sich an die linearen Reihen der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide knüpfen und die wir oben kurz skizziert haben, sind Liapounoff [3]) und Poincaré [4]) zu dem Ergebnis gelangt, daß es neben den Ellipsoiden unendlich viele andere Gleichgewichtsfiguren gibt, die den Ellipsoiden benachbart sind.

Die Ergebnisse von Maclaurin und Jacobi, Liapounoff und Poincaré führen zur Aufstellung des folgenden allgemeinen Existenztheorems von Gleichgewichtsfiguren:

> Gegeben sei eine beliebige mit konstantem $\omega$ rotierende Gleichgewichtsfigur $G$. Wird $G$ als regulär angenommen, so gibt es zu jedem $\omega$ benachbarten Wert der Winkelgeschwindigkeit genau eine neue Gleichgewichtsfigur, die sich nur unendlich wenig von der Ausgangsfigur unterscheidet. Durch Variation der Winkelgeschwindigkeit nach beiden Richtungen erhält man eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren. Wird dagegen $G$ als singulär vorausgesetzt, so erhält man durch Variation von $\omega$ zwei oder mehrere Reihen, die sich in $G$ kreuzen. Es kann dabei der Fall eintreten, daß für wachsendes oder abnehmendes $\omega$ die Reihen verschwinden, d. h. es gehen von $G$ nur Arme von Gleichgewichtsfiguren aus.

Die Mathematik geht oft, wenn sie von irgendeinem Problem nicht die allgemeine Lösung, wohl aber einige spezielle Lö-

---

[3]) A. Liapounoffs Arbeiten sind bis auf seine Dissertation aus dem Jahre 1884 in den Schriften der Petersburger Akademie der Wissenschaften erschienen. Seine Dissertation wurde ins Französische übersetzt von Davaux und veröffentlicht in Ann. Toulouse 1904.

[4]) H. Poincaré, loc. cit. [1]).

sungen kennt, folgendermaßen vor. Durch eine kleine Variation der die Lösung festlegenden Größen sucht sie neue Lösungen zu gewinnen, um vielleicht dadurch den Gesamtbereich aller Lösungen auszuschöpfen. Sie studiert Existenzprobleme im „Kleinen".

In den folgenden Ausführungen soll nun gezeigt werden, wie man im Anschluß an die Arbeiten von Poincaré, Schwarzschild und vor allem Lichtenstein[5]) das Theorem beweisen kann. Es sei gleich hier festgestellt, daß wir nicht den größten Wert auf mathematische Exaktheit legen. Es stehen vielmehr die Methoden der Rechnung im Vordergrund, die Gedanken rein mathematischer Art sind herausgearbeitet. Die Beweise sind, soweit sie für die Entwicklung wichtig sind, durchgeführt, doch sind auch bewußt Lücken gelassen, doch nur solche, die weniger der Astronom als vielmehr der Mathematiker empfindet. Sie sind aber an den betreffenden Stellen angegeben.

Der Gang ist folgender: Im ersten Teil wird untersucht, inwieweit man das Theorem beweisen kann, wenn man sich entsprechend dem speziellen Poincaré'schen Ansatz für die den Ellipsoiden benachbarten Gleichgewichtsfiguren auf erste Näherung beschränkt. Es wird sich dabei herausstellen, daß eine erste Näherung im singulären Fall keine bestimmten Aussagen gestattet. Sodann wird die vollständige Reihenentwicklung des Potentials der deformierten Figur nach Lichtenstein durchgeführt. Die dabei angewandte Methode benutzt man bisweilen auch, wenn man eine Funktion von mehreren Veränderlichen in eine Taylorreihe entwickeln will. Schwarzschild hat ebenfalls eine vollständige Reihenentwicklung angegeben, und zwar, da sein Ausgangspunkt die Gleichgewichtsbedingung *(B)* ist, für die potentielle Energie der deformierten Figur. Er muß dabei die Annahme einer Reihen-

---

[5]) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen nach dem Newtonschen Gesetz sich anziehen. a) Erste Abhandlung. Allgemeine Existenzsätze. Math. Zeitschr., Bd. 1.

entwicklung nach Orthogonalfunktionen für die Deformation machen und entwickelt dann die Energie nach Potenzen der Werte der Entwicklungskoeffizienten. Es wird gezeigt, daß man unter derselben Annahme für die Deformation das Potential selbst in eine solche Reihe entwickeln kann. Hiermit hat man aber nicht viel gewonnen, man muß vielmehr, wenn man das Theorem beweisen will, zur potentiellen Reihenentwicklung übergehen. Dagegen wird durch die Lichtensteinsche Reihenentwicklung das Problem auf eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung zurückgeführt, die dann im letzten Teil kurz diskutiert wird.

## 2.

## Skizzierung eines Beweises des Theorems unter Beschränkung auf eine erste Näherung.

Der folgende Beweis vollzieht sich in zwei Etappen; zunächst gelingt es uns, das Problem mathematisch in einer Integralgleichung zu formulieren.

### *a) Aufstellung einer Integralgleichung.*

Wir gehen aus von einer beliebigen Gleichgewichtsfigur $G$, die gleichmäßig mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um die $z$-Achse rotieren soll. Zufolge der Gleichgewichtsbedingung ($A$) muß auf der Oberfläche

$$V(x, y, z) + \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.} = C \tag{1}$$

sein. Man denke sich nun $G$ auf irgendeine Weise deformiert unter gleichzeitiger Variation der Winkelgeschwindigkeit. Die neue Figur — wir nennen sie $G_1$, ihre Rotationsgeschwinoigkeit $\omega_1$ — setzt sich zusammen aus der alten Figur und einer dünnen Schale. Ihre Dicke $\zeta$ bestimmen wir in der üblichen Weise wie folgt: Wir errichten die Normalen auf der Oberfläche von $G$ und messen dann den Abstand $\zeta$ zwischen der ursprünglichen Figur und erd

deformierten Figur längs dieser Normalen, nach außen positiv, nach innen negativ gezählt. $G_1$ ist Gleichgewichtsfigur, wenn gilt

$$(2) \qquad V_1\,(x_1, y_1, z_1,) + \frac{1}{2}\,\omega_1{}^2\,(x_1{}^2 + y_1{}^2) = \text{const.} = C_1\ ,$$

wo $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Koordinaten irgendeines Punktes der Oberfläche von $G_1$ bezeichnen. Das Potential von $G_1$ im Aufpunkte $A_1\,(x_1, y_1, z_1)$ setzt sich zusammen aus dem Potential von $G$ in diesem Punkte und dem Potential der dünnen Schale in demselben Punkte. Bezeichnen wir letzteres mit $V'$, so ist also

$$V_1\,(x_1, y_1, z_1) = V\,(x_1, y_1, z_1) + V'\,(x_1, y_1, z_1)$$

oder kurz

$$V_1\,(A_1) = V\,(A_1) + V'\,(A_1)\ .$$

Dem Punkte $A_1$ entspricht auf $G$ der Punkt $A$, es ist also $\overline{AA_1} = \zeta$. Mit Poincaré machen wir für $V\,(A_1)$ den folgenden Ansatz

$$V\,(A_1) = V\,(A) + \frac{\partial V}{\partial n}\,\zeta$$

unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung. Mit $n$ ist die in $A$ errichtete äußere Normale gemeint. Setzen wir den für $V_1\,(A_1)$ gewonnenen Ausdruck

$$V_1\,(A_1) = V\,(A) + \frac{\partial V}{\partial n}\cdot\zeta + V'\,(A_1)$$

in (2) ein, so erhält man

$$V\,(A) + \frac{\partial V}{\partial n}\cdot\zeta + V'\,(A_1) + \frac{1}{2}\,\omega_1{}^2\,(x_1{}^2 + y_1{}^2) = C_1\ .$$

Die Koordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ können wir durch die ursprünglichen Koordinaten $x$, $y$, z und die Deformation $\xi$ ausdrücken, man bekommt

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \zeta\,\cos\,(nx) \\ y_1 &= y + \zeta\,\cos\,(ny) \\ z_1 &= z + \zeta\,\cos\,(nz). \end{aligned}$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2} = \lambda \ ,$$

wo $\lambda$ eine sehr kleine Größe bedeutet. Durch Einsetzen erhält man dann für den Ausdruck $\frac{1}{2}\omega_1^2 (x_1^2 + y_1^2)$ die folgende Umformung

$$\frac{1}{2}\omega_1^2 (x_1^2 + y_1^2) = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) + \lambda (x^2 + y^2) + \zeta \omega^2 \left[x \cos (nx) + y \cos (ny)\right] \ ,$$

wenn wir wieder unendlich kleine Glieder zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen. Gleichung (2) geht dann weiter über in die folgende

$$V(A) + \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{\partial V}{\partial n}\zeta + V'(A_1) + \lambda (x^2 + y^2) + \zeta \omega^2 [x \cos (nx) + y \cos (ny)] = C_1 \ .$$

Da die Summe der beiden ersten Glieder nach Gleichung (1) bereits für sich konstant ist, so lautet demnach die Bedingung dafür, daß die neue Figur $G_1$ eine Gleichgewichtsfigur ist,

$$\frac{\partial V}{\partial n}\zeta + V'(A_1) + \lambda (x^2 + y^2) + \zeta \omega^2 [x \cos (nx) + \cos (ny)] = C_2 \ , \tag{3}$$

wo $C_2 = C_1 - C$ ist. Der Ausdruck $\omega^2 [x \cos (nx) + y \cos (ny)]$ hat eine sehr anschauliche Bedeutung, denn es ist

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)\right]}{\partial n} = \omega^2 [x \cos (nx) + y \cos (ny)],$$

er stellt also die Normalkomponente der auf einen materiellen Punkt von der Masse 1 ausgeübten Zentrifugalkraft dar. Weiter stellt $\frac{\partial V}{\partial n}$, der Wert der Ableitung $V$ nach der äußeren Normale, die Komponente der von $G$ auf einen Punkt von der Masse 1 ausgeübten Anziehungskraft dar. Setzen wir zur Abkürzung

$$-g = \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\delta \left[\frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2)\right]}{\delta n},$$

so ist daher $-g$ die auf der Oberfläche von $G$ senkrecht stehende und nach innen gerichtete resultierende Kraft. Setzen wir voraus, daß sie in keinem Randpunkt verschwindet und wird die äußere Normale positiv gerechnet, so ist $-g$ eine negative, nie verschwindende Größe. Führt man diese Größe in (3) ein, so erhält man

$$-g\,\zeta + V'(A_1) + \lambda\,(x^2 + y^2) = C_2.$$

Das Potential $V'$ der dünnen materiellen Schale können wir auffassen als das Potential einer einfachen Flächenbelegung mit der Oberflächendichte $\zeta$; wir schließen jedoch negative Werte vnn $\zeta$ nicht aus. Es ist dann

$$V' = \int \frac{\zeta'\,d\,\omega'}{r},$$

wobei das Integral über die Oberfläche von $G$ zu erstrecken ist. Auch diesen Ausdruck entwickeln wir und setzen

$$V'(A_1) = V'(A) + \left(\frac{\partial V'}{\partial n}\right)_A \zeta,$$

wobei wir wieder Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Die Normalableitung $\left(\frac{\partial V'}{\partial n}\right)_A$ ist so zu verstehen: Auf der in $A$ errichteten Normale nehmen wir einen durch endliche Entfernung von der Oberfläche getrennten Punkt $P$ an und bilden dort die Ableitung nach der äußeren Normale. Der bei Annäherung dieses Punktes $P$ an die Oberfläche sich ergebende Grenzwert wird als die Normalableitung $\frac{\partial V'}{\partial n}$ im Randpunkt $A$ bezeichnet. Nach einem Theorem der Potentialtheorie ist

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial n}\right)_A = \frac{\partial V'}{\partial n^A} - 3\pi\zeta_A,$$

wo

$$\frac{\partial V}{\partial n_A} = -\int \frac{\zeta' \cos(r_{AA'}, n_A)}{r^2_{AA'}} d\omega ,$$

und $\zeta_A$ die Oberflächendichte an der Stelle $A$ ist. Mit $A'$ ist der Integrationspunkt bezeichnet. Multipliziert man mit $\zeta$, so erhält man die Glieder 2. O. in $\zeta$ und $\zeta'$, also Glieder, die wir vernachlässigen wollen. Wir können daher in erster Näherung

$$V'(A_1) = V'(A)$$

setzen, sodaß dann $r$ die Entfernung zweier Punkte der Oberfläche von $G$ bezeichnet.

Somit erhalten wir für unsere Bedingung die folgende Gleichung

$$(4) \qquad -g\zeta + \int \frac{\zeta' d\omega'}{r} + \lambda (x^2 + y^2) = C_2 .$$

Da $\zeta$ die einzige unbekannte Größe ist, so stellt die Gleichung (4) eine inhomogene lineare Integralgleichung zweiter Art für die Deformation $\zeta$ dar. Über die Konstante $C_2$ werden wir weiter unten noch einiges zu sagen haben. Durch Einführung krummliniger Koordinaten auf der Oberfläche von $G$ können wir die Gleichung mathematisch noch etwas eleganter schreiben. Die Gleichung der Oberfläche von $G$ ist dann in der symmetrischen Darstellung durch 2 Parameter, $u$ und $v$, anzunehmen

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) . \end{aligned}$$

Das Oberflächenelement $d\omega'$ nimmt dann die Form

$$d\omega' = F(u', v')\, du'\, dv'$$

an, wo

$$F(u', v') = \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u', v')}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u' v')}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u' v')}\right]^2}$$

ist, $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u', v')}$ usw. sind Funktionaldeterminanten. Ferner setzen wir

$$x^2 + y^2 = f(u, v).$$

Streng genommen müßten wir für die Größen $\zeta$, $g$, $r$ in Abhängigkeit von den neuen Koordinaten $u$ und $v$ neue Bezeichnungen einführen, was wir aber der Einfachheit halber unterlassen. Tragen wir wegen der nun folgenden Diskussion überall die Argumente ein, so schreibt sich in den neuen Koordinaten die Integralgleichung (4) folgendermaßen:

$$-g(u, v)\,\xi(u, v) + \int \frac{\zeta(u', v')}{r(u, v; u' v')} F(u' v')\, du'\, dv' = C_2 - \lambda f(u, v)$$

oder nach Division durch $-g(u, v)$

$$\xi(u, v) - \int \frac{\zeta(u' v')}{g(u,v)\, r(u, v; u' v')} F(u', v')\, du'\, dv' = \frac{C_2 - \lambda f(u, v)}{-g(u, v)}.$$

Bezeichnen wir endlich den Flächenpunkt mit den Koordinaten $u$, $v$ bzw. $u'$, $v'$ kurz mit $\sigma$ bzw. $\sigma'$, das Flächenelement $du'\, dv'$ mit $d\sigma'$, so erhalten wir weiter

$$(5) \qquad \zeta(\sigma) - \int \frac{\zeta(\sigma')}{g(\sigma)\, r(\sigma, \sigma')} F(\sigma')\, d\sigma' = \frac{\lambda f(\sigma) - C_2}{g(\sigma)}$$

Die gegebene Funktion der rechten Seite nennen wir kurz „Störungsfunktion". Es erheben sich nun sofort die Fragen:

1. Gibt es Lösungen $\zeta(\sigma)$ der vorgelegten Integralgleichung?
2. Falls die erste Frage bejaht ist: gibt es mehrere Lösungen?

### *b) Diskussion der Integralgleichung.*

Vor Beantwortung der Fragen sei noch auf etwas anderes eingegangen. In (5) ist der Kern $\frac{F(\sigma')}{g(\sigma)\, r(\sigma, \sigma')}$ unsymmetrisch, wie man ohne weiteres einsieht. Man kann ihn aber leicht symmetrisieren, indem man die Gleichung (5) zunächst einmal mit $\sqrt{F(\sigma)}$ multipliziert, eine neue Funktion $\eta(\sigma) = \sqrt{F(\sigma)}\, \zeta(\sigma)$ einführt und dann die Substitution $\vartheta(\sigma) = \sqrt{g(\sigma)}\, \eta(\sigma)$ anwendet

Man bekommt dann den folgenden symmetrischen Kern $\frac{F(\sigma)\,F(\sigma')}{g(\sigma)\,g(\varrho')\,r(\sigma,\sigma')}$. Kennt man eine Lösung $\vartheta(\sigma)$, so kann man rückwärts die Deformationsfunktion $\zeta(\sigma)$ gewinnen. Von der Gleichung (5) werden wir im folgenden kaum Gebrauch machen, sondern fast immer von der Gleichung (4) ausgehen. Ihren Kern kann man natürlich genau so symmetrisieren, indem man die Substitution $\varrho = \sqrt{g}\,\zeta$ anwendet. Endlich bemerken wir noch, daß der Kern für $\sigma = \sigma'$ singulär wird, und zwar ist die Ordnung des Unendlichwerdens gleich 1. Er ist daher integrabel, wenn auch nicht mehr quadratisch integrabel, das Haupttheorem aus der Theorie der Integralrechnungen darf auf Integralgleichungen mit solchen unbeschränkten Kernen angewandt werden.

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns den am Ende des vorigen Abschnittes gestellten Fragen zu. Ihre Beantwortung vermittelt uns der Fundamentalsatz der Theorie der Integralgleichungen, welcher aussagt, daß eine inhomogene lineare Integralgleichung zweiter Art stets genau eine Lösung hat, wenn die durch Nullsetzen der Störungsfunktion aus ihr hervorgehende homogene Gleichung außer trivialen Lösungen keine weiteren Lösungen besitzt und daß sie, falls die homogene Gleichung außer den trivialen Lösungen weitere Lösungen hat, nur lösbar ist, wenn die Störungsfunktion gewisse Bedingungen erfüllt.

Hat die homogene Gleichung

$$\zeta(\sigma) - \int K(\sigma, \sigma')\,\zeta(\sigma')\,d\sigma' = 0$$

mit

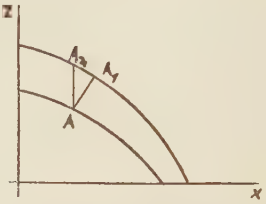
$$K(\sigma, \sigma') = \frac{F(\sigma')}{g(\sigma)\,r(\sigma, \sigma')}$$

oder, wenn wir wieder ihre Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten heranziehen,

$$-g\zeta + \int \frac{\zeta'}{r}\,d\omega' = 0$$

Lösungen?

Zunächst besitzt sie die triviale Lösung $\zeta = o$. Sie besitzt aber, wie wir jetzt zeigen werden, zwei weitere triviale Lösungen.




Figur 3: Parallelverschiebung von $G$ um die kleine Strecke $\varepsilon$.

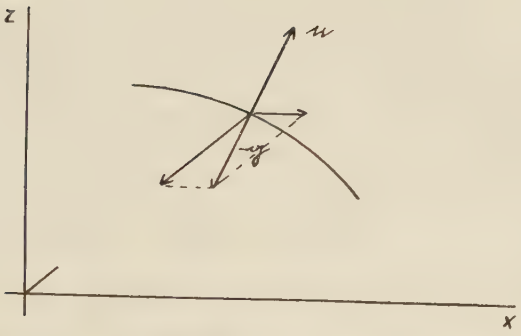
Die gegebene Gleichgewichtsfigur verschieben wir parallel zu sich selbst und parallel zur $z$-Achse um ein kleines Stück $\varepsilon$. Sie geht dadurch in eine zum gleichen Wert der Winkelgeschwindigkeit und zum gleichen Wert des Gesamtpotentials auf der Oberfläche gehörige Gleichgewichtsfigur über. Bezeichnet man wieder mit $\zeta$ die Entfernung zwischen den beiden unendlich benachbarten Figuren, so ist $\overline{AA_1} = \zeta$ und $\overline{AA_2} = \varepsilon$ (siehe Figur 2). $A_2$ ist der Schnittpunkt der Parallelen zur $z$-Achse durch den Punkt $A$. In dem kleinen, in $A_1$ rechtwinkligen Dreieck $A\,A_1\,A_2$ ist

$$\zeta = \varepsilon \cos (A_1\,A\,A_2) = \varepsilon \cos (n\,z)\,.$$

Diese spezielle Deformation ist eine Lösung unseres Problems. Es muß daher, wenn man in Gleichung (4) für $\zeta$ diesen Wert einsetzt und weiter $C_2$ und $\lambda = o$ setzt, die folgende Gleichung erfüllt sein

$$\varepsilon \left[-g \cos (nz) + \int \frac{\cos (n'z)}{r}\, d\omega'\right] = o.$$

Da der erste Faktor ungleich Null ist, muß der zweite Faktor verschwinden, d. h. es muß cos $(nz)$, der Richtungskosinus der Normale mit der $z$-Achse, eine Lösung der homogenen Integralgleichung sein. Das sieht man folgendermaßen ein:




Figur 3: $-g$ als Resultierende der Schwerkraft und Zentrifugalkraft.

$-g \cos (nz)$ ist die Projektion der resultierenden Kraft auf die $z$-Achse, da die Projektion der Zentrifugalkraft auf die $z$-Achse Null ist (siehe Figur 3), so ist $-g \cos (nz)$ zugleich die Projektion der Schwerkraft auf die $z$-Achse, d. h. es ist

$$-g \cos (nz) = \frac{\partial V}{\partial z} .$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\int \frac{\cos (n' z)}{r} \, d\omega' = \int \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} \, d\omega' ,$$

wegen

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}$$

erhält man dann

$$\int \frac{\cos (n' z)}{r} \, d\omega' = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

und somit

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0 .$$

Damit ist gezeigt, daß cos $(nz)$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung ist. Es ist natürlich auch $c_1 \cos (nz)$, wo $c_1$ eine beliebige Konstante bedeutet, Lösung der homogenen Gleichung.

Eine dritte Lösung erhält man, wenn man die vorgegebene Gleichgewichtsfigur um einen kleinen Winkel $\varepsilon$ um die Rotationsachse dreht. Hierdurch geht $G$ in eine zum gleichen Wert der Winkelgeschwindigkeit und zum gleichen Wert des Gesamtpotentials auf der Oberfläche gehörige Gleichgewichtsfigur über, die Deformation $\zeta$ läßt sich mittels einfacher geometrischer Betrachtungen auch hier durch einen einzigen Term darstellen:

$$\zeta = \varepsilon \, [x \cos (ny) - y \cos (nx)] \, .$$

Durch Einsetzen zeigt man dann, daß $x \cos (ny) - y \cos (nx)$ und damit auch $c_2 \, [x \cos (ny) - y \cos (nx)]$ Lösung der homogenen Integralgleichung ist. Beide Deformationen führen zu keinen neuartigen Gleichgewichtsfiguren, und da sie, abgesehen von einem Faktor, übereinstimmen mit den beiden Lösungen der homogenen Integralgleichung, so haben wir in den letzteren zwei weitere triviale Lösungen gefunden. Die homogene Integralgleichung hat somit drei triviale Lösungen

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 0 \\ \zeta_1 &= c_1 \cos (nz) \\ \zeta_2 &= c_2 \, [x \cos (ny) - y \cos (nx)] \, . \end{aligned}$$

Die Lösung $\zeta_0 = 0$ wollen wir aus den weiteren Betrachtungen ganz ausschließen. Wenn daher im folgenden von den trivialen Lösungen der homogenen Integralgleichung die Rede ist, so sind damit die beiden Lösungen $\zeta_1$ und $\zeta_2$ gemeint.

Zwei Bemerkungen über die beiden trivialen Lösungen unseres Problems.

1. Die homogene Gleichung

$$\varrho - \int \frac{\varrho' \, d\omega'}{\sqrt{g} \, \sqrt{g'} \, r} = 0$$

hat, wie wir gesehen haben, im allgemeinen die beiden Lösungen

$$\varrho_1 = c_1 \sqrt{g} \cos (nz)$$

$$\varrho_2 = c_2 \sqrt{g} [x \cos (ny) - y \cos (nx)].$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung

$$\varrho - \int \frac{\varrho'}{\sqrt{g}\sqrt{g'}\,r} d\omega' = \frac{\lambda (x^2+y^2) - C_3}{\sqrt{g}}$$

ist die Orthogonalität der Störungsfunktion $\frac{\lambda (x^2+y^2) - C_2}{\sqrt{g}}$ zu $\varrho_1$ und $\varrho_2$, d. h. es müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein

$$\int \frac{\lambda (x^2+y^2) - C_2}{\sqrt{g}} c_1 \sqrt{g} \cos (nz)\, d\omega = o.$$

$$\int \frac{\lambda (x^2+y^2) - C_2}{\sqrt{g}} c_2 \sqrt{g} [x \cos (ny) - y \cos (nx)]\, d\omega = o.$$

Die erste Gleichung schreiben wir so

$$\lambda c_1 \int (x^2+y^2) \cos (nz)\, d\omega - C_2 c_1 \int \cos (nz)\, d\omega = o.$$

Das zweite Integral ist Null, da es die algebraische Summe aus den Projektionen aller Elemente einer geschlossenen Fläche auf eine Ebene darstellt. Das erste Integral formt man mittels der speziellen Green'schen Formel

$$\int u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} d\tau + \int \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} d\tau = \int u \frac{\partial v}{\partial z} \cos (nz)\, d\omega$$

um, indem man $u\,(x, y, z) = x^2 + y^2$ und $v\,(x, y, z) = z$ setzt, es folgt dann sofort, daß auch das erste Integral Null ist. Die erste Bedingung ist somit erfüllt. Genau so beweist man mittels der Green'schen Formel das Bestehen der zweiten Orthogonalitätsbedingung.

2. Es läßt sich durch geeignete Festsetzungen erreichen, daß die beiden trivialen Lösungen unseres Problems nicht auftreten. Bei Rotationsfiguren ist übrigens, wie man leicht einsieht, die

zweite Lösung stets identisch Null. Setzt man etwa fest, daß der Anfangspunkt des Koordinatensystems mit dem Schwerpunkt der Masse zusammenfallen soll, so dürfen wir $G$ nicht so verschieben oder deformieren, daß der Schwerpunkt aus dem Nullpunkt herausfällt.

Diese beiden Bemerkungen unterstreichen noch einmal die Trivialität der beiden Lösungen, und wir können von ihnen ganz absehen und uns so ausdrücken, als ob sie überhaupt nicht vorhanden seien.

Nach diesen Ausführungen über Lösungen der homogenen Gleichung kommen wir jetzt zur Beantwortung der beiden am Ende des vorliegenden Abschnitts aufgeworfenen Fragen. Auf Grund des Fundamentalsatzes der Theorie der Integralgleichungen hat man zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

*Fall 1.* Die homogene Gleichung

$$\zeta - \int \frac{\zeta'}{g\,r}\, d\omega' = o$$

hat keine nichttriviale Lösung. Diese können wir auch so formulieren, in der homogenen Gleichung

$$\zeta - k \int \frac{\zeta'}{g\,r}\, d\omega' = o$$

ist der Parameterwert $k = 1$ kein Eigenwert. Die inhomogene Gleichung

$$\zeta - k \int \frac{\zeta'}{g\,r}\, d\omega' = \frac{\lambda\,(x^2 + y^2) - C_1}{g}$$

besitzt dann eine und nur eine Lösung, welche in bekannter Weise durch

$$\zeta = \frac{\lambda\,(x^2 + y^2) - C_2}{g} + k \int K\,(\omega, \omega';\, k)\, \frac{\lambda\,(x'^2 + y'^2) - C_2}{g'}\, d\omega'$$

mit $k = 1$, also durch

$$\zeta = \frac{\lambda\,(x^2 + y^2) - C_2}{g} + \int K\,(\omega, \omega';\, 1)\, \frac{\lambda\,(x'^2 + y'^2) - C_2}{g'}\, d\omega'$$

dargestellt wird. $K(\omega, \omega'; k)$ ist der lösende Kern. Zum praktischen Rechnen wird man ihn in eine Reihe entwickeln, die man nach den ersten Gliedern abbricht. Indem man $\lambda$ hinreichend klein wählt, kann man immer erreichen, daß die Deformation $\zeta$ klein genug ausfällt. Diese Lösung enthält noch die kleine Konstante $C_2$, die man nicht ohne weiteres bestimmen kann, da man hierzu bereits die deformierte Figur kennen müßte. Wählen wir als erste grobe Näherungslösung die folgende

$$\zeta = \frac{\lambda (x^2 + y^2)}{g} + \lambda \int \frac{x'^2 + y'^2}{g' r} \, d\omega' - C_2 \left(\frac{1}{g} + \int \frac{1}{g' r} \, d\omega'\right)$$

und setzen hierin $\lambda = 0$, so folgt

$$\zeta = - C_2 \left(\frac{1}{g} + \int \frac{1}{g' r} \, d\omega'\right) .$$

Setzt man für $C_2$ kleine negative Werte ein, so erhält man Deformationen, die, da sie auf der ganzen Oberfläche einerlei Zeichen haben, eine Vermehrung der Masse bedeuten. Ebenso ist es, wenn man für $C_2$ kleine positive einsetzt, nur würden diese Deformationen eine Verminderung der Masse bedeuten. Setzt man daher Unveränderlichkeit der Masse voraus, so erfordert diese Festsetzung, daß man die Konstante gleich Null setze. Wir setzen diese Konstante in dem weiteren Lauf der Betrachtungen gleich Null. Natürlich muß man sich in jedem besonderen Fall klarmachen, was das Nullsetzen bedeutet.

Das Ergebnis können wir anschaulich so formulieren: Zu jedem $\omega$ benachbarten Wert der Winkelgeschwindigkeit gibt es genau eine neue Gleichgewichtsfigur, die sich nur unendlich wenig von der Ausgangsfigur unterscheidet. Speziell für $\omega$ gibt es gemäß unserer Festsetzung nur die eine Gleichgewichtsfigur $G$. Durch Variation der Winkelgeschwindigkeit nach beiden Richtungen erhält man eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren. Die vorgesehene Gleichgewichtsfigur ist also regulär.

Fall 2. Die homogene Integralgleichung

$$\zeta - \int \frac{\zeta'}{g\,r}\, d\omega' = 0$$

besitzt eine nichttriviale Lösung, oder in der Gleichung

$$\zeta - k \int \frac{\zeta'}{g\,r}\, d\omega' = 0$$

ist der Parameterwert $k = 1$ ein einfacher Eigenwert. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\zeta - \int \frac{\zeta'}{g\,r}\, d\omega' = \frac{\lambda\,(x^2 + y^2)}{g}$$

setzt sich unter der Voraussetzung, daß die Orthogonalitätsbedingung erfüllt ist; zusammen aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der nichttrivialen Lösung der homogenen, letztere noch multipliziert mit einem beliebigen kleinen Faktor. Indem man diesen Faktor innerhalb gewisser Grenzen variiert, erhält man im allgemeinen unendlich viele Deformationen. Mehr können wir bei einer ersten Näherung nicht aussagen, wie wir später ganz deutlich erkennen werden.

In einem folgenden Abschnitt zeigen wir auf eine etwas andere Weise, daß es im singulären Fall sehr viele Massenanordnungen zum selben Werte der Winkelgeschwindigkeit gibt, die Gleichgewichtsfiguren sind. Durch Spezialisierung gelangen wir zu den von Poincaré aufgestellten Bedingungsgleichungen für die den Ellipsoiden benachbarten Gleichgewichtsfiguren.

### *c) Die Poincaré'schen Bedingungsgleichungen für die den Ellipsoiden benachbarten Gleichgewichtsfiguren.*

Setzen wir in der inhomogenen Integralgleichung $\lambda = 0$, so bekommen wir

$$-g\zeta + \int \frac{\zeta'}{r}\, d\omega' = 0\,. \tag{6}$$

Wir führen Orthogonalfunktionen $\eta_i\ (u, v)$ ein, die den Integralrelationen

$$(7_1) \qquad \int g\, \eta_i'\, \eta_k'\, d\omega' = 0 \text{ oder } = 1$$

je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$,

$$(7_2) \qquad \int \eta_i' \frac{d\omega'}{r} = g\, s_i\, \eta_i$$

genügen. Die $s_i$ sind Konstante [6]). Wir nehmen an, daß sich $\zeta$ in eine Reihe nach den Orthogonalfunktionen entwickeln lasse

$$(8) \qquad \zeta = \sum A_i\, \eta_i\,.$$

Ist diese Funktion $\zeta$ in allen Punkten der Fläche vorgegeben, so lassen sich die Entwicklungskoeffizienten $A_i$ leicht bestimmen. Die Gleichung (6) geht dann über in

$$-\, g \sum A_i\, \eta_i + \sum A_i \int \frac{\eta'\, d\omega'}{r} = 0\,,$$

weiter mit Rücksicht auf die Integraleigenschaften der Orthogonalfunktionen

$$-\, g \sum A_i\, \eta_i + \sum A_i\, g\, s_i\, \eta_i = 0$$

oder

$$\sum A_i\, (g\, s_i - g)\, \eta_i = 0\,.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$c_i = g\, s_i - g$$
$$B_i = A_i\, c_i\,,$$

so folgt

$$(9) \qquad \sum B_i\, \eta_i = 0\,,$$

---

[6]) vergl. K. Schwarzschild, loc. cit. [3]) S. 244 ff. u. S. 281; ferner S. Oppenheim, die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper in Enzyklopädie d. Mathem. Wissenschaften, VI. 2. B., S. 43.

das heißt die Entwicklung der Null nach Orthogonalfunktionen. Daraus folgt

$$B_i = A_i c_i = 0 \text{ für } i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Ist $c_i$ ungleich Null, so hat man $A_i$ gleich Null zu setzen, ist dagegen $c_i$ gleich Null, so kann man $A_i$ willkürlich wählen, d. h. man erhält, indem man die von Null verschiedenen Entwicklungskoeffizienten auf alle mögliche Art innerhalb gewisser Grenzen variieren läßt, im allgemeinen unendlich viele Deformationen $\zeta$, die zu Gleichgewichtsfiguren mit derselben Rotationsgeschwindigkeit führen.

Wir setzen nun speziell ein Ellipsoid als Ausgangsfigur voraus und führen elliptische Koordinaten $\varrho, \mu, \nu$ ein, wobei $\varrho$ das Ellipsoid festlegt und $\mu, \nu$ Flächenkoordinaten sind. Lamé'sche Funktionen von $\varrho$, bzw. $\mu$, bzw. $\nu$ werden mit $R$, bzw. $M$, bzw. $N$ bezeichnet, endlich die zu $R$ konjugierten Lamé'schen Funktionen mit $S$. Die Orthogonalfunktion $\eta$ zerfällt jetzt in ein Produkt von zwei Funktionen, deren jede von einem Parameter abhängt,

$$\eta = 1 - \frac{M N}{K} , \tag{11}$$

wo

$$l^2 = \frac{1}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}$$

und $K$ eine Konstante ist. Liouville hat die beiden folgenden Integralrelationen gefunden

$$\int \frac{l' M_i' N_i' \, d\omega'}{r} = \frac{4\pi R_i S_i M_i N_i}{2n + 1} \tag{7_1'}$$

$$\int l' M_i' N_i' M_k' N_k' \, d\omega' = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases} . \tag{7_2'}$$

Vergleicht man (7') mit (7) und (11), so findet man, daß

$$g l = K_i ,$$

wo $K_1$ eine weitere Konstante bezeichnet, ist. Der Wert dieser Konstanten ergibt sich zu $\frac{4}{3}\pi R_1 S_1$, also

$$g\,l = \frac{4}{3}\pi R_1 S_1 .$$

Die Entwicklung (8) geht über in

(8′) $$\zeta = \sum l\, C_i M_i N_i .$$

Die Gleichungen (9) lauten jetzt

(9′) $$4\pi \sum C_i \left(\frac{S_i R_i}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3}\right) M_i N_i = 0 .$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllbar, wenn jeder Reihenkoeffizient verschwindet

(10′) $$C_i \left(\frac{S_i R_i}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3}\right) = 0 \text{ für } i = 0, 1, 2 \ldots .$$

Jede Gleichung ist das Produkt zweier Funktionen. Ist der zweite Faktor ungleich Null, so hat man $C_i$ gleich Null zu setzen; ist dagegen der zweite Faktor gleich Null, so kann man $C_i$ innerhalb gewisser Grenzen willkürlich wählen, d. h. man erhält, indem man die von Null verschiedenen Entwicklungskoeffizienten auf alle mögliche Art innerhalb gewisser Grenzen variiert, im allgemeinen unendlich viele Deformationen, die zu Gleichgewichtsfiguren mit derselben Winkelgeschwindigkeit führen.

Wir betrachten noch einmal die Gleichungen (10′). Unsere Aufgabe wäre es nun zu untersuchen, wann der zweite Faktor verschwindet oder, anders ausgedrückt, welche Wurzeln die Gleichungen

(12) $$\frac{S_i R_i}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3} = 0 \text{ für } i = 0, 1, 2 \ldots ,$$

in denen $\varrho$ die Unbekannte ist, haben. Diese Untersuchung hat Poincaré durchgeführt, denn die Gleichungen (12) sind die von Poincaré aufgestellten Bedingungsgleichungen für die den Ellipsoiden benachbarten Gleichgewichtsfiguren. Eine besondere Bedeutung kommt den beiden Koeffizienten $A_1$ und $A_4$ zu, denn sie

sind identisch mit den beiden trivialen Lösungen, was man sofort einsieht, wenn man letztere durch Lamé'sche Funktionen darstellt.

Der hier skizzierte Beweis des Existenztheorems, der sich auf eine erste Näherung beschränkt, kann, wie wir gesehen haben, im singulären Fall keine bestimmten Aussagen machen. Der springende Punkt war die Potentialdifferenz $V_1 - V$, die wir hier durch eine Form ersten Grades in $\zeta$ und $\zeta'$ dargestellt haben,

$$V_1 - V = \frac{\partial V}{\partial n}\,\zeta + \int \frac{\zeta'}{r}\,d\omega' \ .$$

Es liegt nahe, diese Differenz nach Potenzen der Werte von $\zeta$ weiter zu entwickeln, allein auf dem angegebenen Wege kommt man nicht zu diesem Ziele, weil schon bei Berücksichtigung der zweiten Potenzen Integrale auftreten, die ihren Sinn verlieren, falls Aufpunkt und Integrationspunkt zusammenrücken. Durch Anwendung eines in der Differential- und Integralrechnung oft benutzten Verfahreus zur Entwicklung von Funktionen von mehreren Veränderlichen in eine Taylorreihe gelingt es, $V_1 - V$ in eine unendliche gleichmäßig konvergierende Reihe zu entwickeln die nach Potenzen von $\zeta$ und ihren ersten Ableitungen fortschreitet. Diese Entwicklung hat zum ersten Male Lichtenstein durchgeführt.[7])

*§ 3. Vollständige Reihenentwicklung der Potentialdifferenz $V_1 - V$.*

Das Potential $V$ ist eine gegebene Funktion der Veränderlichen x, y, z, wo x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur $G$ bezeichnen, es ist definiert durch das dreifache Integral

$$V = \int \frac{d\tau'}{r} \ ,$$

erstreckt über das von $G$ eingenommene Volumen, bzw. durch das zweifache Integral

[7]) L. Lichtenstein, loc. cit. [5])

$$V = \frac{1}{2} \int \cos (x\, n')\, d\omega' ,$$

erstreckt über die Oberfläche von $G$, unter $(r\, n')$ den Winkel verstanden, den die Verbindungslinie zwischen dem Flächenelement $d\omega'$ und dem Aufpunkt mit der äußeren Normale in $d\omega'$ einschließt. Die Variablen x, y, z, die ja die Koordinaten eines Punktes der Oberfläche bezeichnen, kommen sowohl im Integranden als auch in der Gleichung des Integrationsgebietes vor. Eine Änderung des Aufpunktes ist also gleichzeitig verbunden mit einer Änderung der Gleichgewichtsfigur $G$ selber. Es soll nun die Zunahme $\Delta V = V_1 - V$ berechnet werden, welche stattfindet, wenn von bestimmten Anfangswerten x, y, z aus die Variablen gleichzeitig die Zuwächse $\Delta x = x_1 - x$, $\Delta y = y_1 - y$, $\Delta z = z_1 - z$, wo $x_1, y_1$, zy die Koordinaten des x, y, z entsprechenden Punktes der Oberfläche der deformierten Figur $G_1$ bedeuten, erleiden. Wir wollen uns vorstellen, daß diese Änderungen allmählich vor sich gehen, und zwar derart, daß zwischen den gleichzeitigen Änderungen von x, y, z fortwährend dieselben Verhältnisse bestehen, sodaß z. B., wenn x den n-ten Teil der ganzen Zunahme erreicht hat, auch y und z den n-ten Teil ihrer Zunahme erhalten haben. Wir können uns dann so ausdrücken, daß beim Übergang von x, y, z in $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die unabhängig Veränderlichen sich in derselben Richtung ändern und zwar in Richtung der Normalen. Diese Richtung wird durch die Richtungskosinus cos (nx), cos (ny), cos (nz) festgelegt, welche den Zuwächsen proportional sind, die Proportionalitätskonstante ist $\frac{1}{\zeta}$, d. h. es ist $\Delta x = \zeta \cos (nx)$, $\Delta y = \zeta \cos (ny)$, $\Delta z = \zeta \cos (nz)$. Setzen wir nun $\Delta x = t\, \zeta \cos (nx)$, $\Delta y = t\, \zeta \cos (ny)$, $\Delta z = t\, \zeta \cos (nz)$, so hängt es von dem Wert t ab, wie weit wir in dieser Richtung n gehen, t bestimmt also die Größe der Änderung.

Da wir die Richtung der Änderung festgelegt haben, so hängt der Wert der Funktion V nur noch von dem Parameter t ab, und da wir weiter das gesuchte $\Delta V = V_1 - V$ dadurch ge-

winnnen, daß wir t vom Werte $t = 0$ bis zum Werte $t = 1$ anwachsen lassen, so können wir $\Delta V$ mittels der Taylorreihe entwickeln und setzen

$$1) \qquad \Delta V = t \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2!} t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} + \ldots = \frac{1}{n!} t^n \frac{\partial^n V_t}{\partial t^n} ,$$

wo für $\frac{\partial V_t}{\partial t}, \ldots$ die für $t = o$ geltenden Werte einzutragen sind. Die hier auftretenden Differentialquotienten sind, abgesehen von einem gewissen Faktor, identisch mit den Differentialquotienten von $V$ nach der Richtung der Normale n, denn es gilt $\frac{\partial}{\partial t} = \zeta \frac{\partial}{\partial n}$. Die Ableitung $\frac{\partial V_t}{\partial t}$ unterscheidet sich von der früheren Ableitung $\frac{\partial V}{\partial n}$ insofern, als bei der letzteren das Integrationsgebiet nicht mit variiert wurde. Es ist natürlich zu untersuchen, ob die bei Bildung der höheren Differentialquotienten nach der Richtung der Normale unter Festhaltung des Integrationsgebietes sich ergebenden Schwierigkeiten sich nicht auch hier einstellen. Falls diese Untersuchung im positiven Sinne ausgefallen ist, falls also die Entwicklungskoeffizienten wirklich existieren, haben wir dann zu prüfen, ob die Reihe (1) für $0 \leqq t \leqq 1$ gleichmäßig für alle x, y, z der Oberfläche von $G$ konvergiert. Zunächst wollen wir die Entwicklungskoeffizienten ermitteln.

a) Berechnung der Entwicklungskoeffizienten.

Wir beginnen mit der Bildung des ersten Differentialquotienten $\frac{\partial V_t}{\partial t}$; $V_t$ ist ein Ausdruck von der folgenden Form

$$V_t = \int \frac{d\tau_{t'}}{r_t}$$

mit

$$r_t^2 = (x_t - x'_t)^2 + (y_t - y'_t)^2 + (z_t - z'_t)^2.$$

Wir nennen den Aufpunkt kurz $A_t$, seine Koordinaten sind also

$$x_t = x + t\,\zeta \cos(nx)$$
$$y_t = y + t\,\zeta \cos(ny)$$
$$z_t = z + t\,\zeta \cos(nz).$$

Wenn wir das obige Integral in Bezug auf den Parameter t differenzieren wollen, so ist, wie wir bereits ausgeführt haben, zu beachten, daß sowohl der Integrand als auch das Integrationsgebiet selber von t abhängen. Wir bilden zunächst den Differenzenquotienten

$$\frac{V_{t+h}(A_{t+h}) - V_t(A_t)}{h}$$

und zerlegen ihn in zwei Teile, wobei der eine Teil der Änderung bei festgehaltenem Integrationsgebiet, der andere bei festgehaltenem Aufpunkt entspricht; wir setzen also

$$\frac{V_{t+h}(A_{t+h}) - V_t(A_t)}{h} = \frac{V_{t+h}(A_{t+h}) - V_{t+h}(A_t}{h}$$
$$+ \frac{V_{t+h}(A_t) - V_t(A_t)}{h}.$$

Der erste Summand geht für $h \longrightarrow o$ über in

$$\lim_{h \longrightarrow o} \frac{V_{t+h}(A_{t+h}) - V_{t+h}(A_t)}{h} = \int \frac{1}{\partial t}\left(\frac{1}{r_t}\right) d\tau_t'.$$

Führen wir die Differentiation aus, so erhalten wir

$$\int \frac{1}{\partial t}\left(\frac{1}{r_t}\right) d\tau'_t$$

$$= -\zeta \int \left[\frac{\partial}{\partial x'_t}\left(\frac{1}{r_t}\right)\cos(nx) + \frac{\partial}{\partial y'_t}\left(\frac{1}{r_t}\right)\cos(ny)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z'_t}\left(\frac{1}{r_t}\right)\cos(nz)\right] d\tau'_t$$

$$= -\zeta \int \frac{1}{r_t}\left[\cos(nx)\cos(n_t'x) + \cos(ny)\cos(n_t'y)\right.$$
$$\left. + \cos(nz)\cos(n_t'z)\right] d\omega_t'$$

$$= - \zeta \int \frac{1}{r_t} \cos (n\, n_t') \, d\omega_t' \, .$$

Der Wert dieses Ausdrucks an der Stelle $t = o$ ist, abgesehen vom Faktor $\zeta$, identisch mir dem Wert unseres früheren Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial n}$ im Aufpunkt $A$. Der zweite Summand stellt, wie man ohne weiteres sieht, das Potential einer gewissen Schale dar, multipliziert mit $\frac{1}{h}$. Es läßt sich leicht berechnen; in der Grenze erhält man dann

$$\lim \frac{V_{t+h}\,(A_t) - V_t\,(A_t)}{h} = \int \frac{\zeta'}{r_t} \cos (n'\, n_t') \, d\omega_t' \, .$$

Für $t = o$ geht dieser Ausdruck über in

$$\int \frac{\zeta'}{r} \, d\omega' \, ,$$

d. h. in das Potential der Schale, die wir der Ausgangsfigur aufgelegt haben, um die deformierte Figur $G_1$ zu erhalten. Somit bekommen wir

$$(2) \quad \frac{\partial V_t}{\partial t} = - \zeta \int \frac{1}{r_t} \cos (n\, n_t') \, d\omega_t' + \int \frac{\zeta'}{r_t} \cos (n'\, n_t') \, d\omega_t'$$

speziell für $t = o$

$$\left(\frac{\partial V_t}{\partial t}\right) = - \zeta \int \frac{1}{r} \cos (n\, n') \, d\omega' + \int \frac{\zeta'}{r} \, d\omega' \, .$$

Dieser Ausdruck stellt demnach den gesuchten ersten Entwicklungskoeffizienten dar. Setzen wir ihn in die Reihe (1) ein und berücksichtigen nur dieses erste Glied, so erhalten wir

$$\Delta V = \left[ - \zeta \int \frac{1}{r} \cos (n\, n') \, d\omega' + \int \frac{\zeta'}{r} \, d\omega' \right] t$$

und für $t = 1$

$$V_1 - V = - \zeta \int \frac{1}{r} \cos (n\, n') \, d\omega' + \int \frac{1}{r} \, d\omega'$$

$$= - \zeta \frac{\partial V}{\partial n} + \int \frac{\zeta'}{r} \, d\omega' \, ,$$

also eine Form ersten Grades in $\zeta$ und $\zeta'$ in völliger Übereinstimmung mit unseren früheren Überlegungen.

Den $(n+1)$-ten Entwicklungskoeffizienten erhält man durch n-maliges Differenzieren des Ausdrucks (2), den wir so schreiben

$$(2') \qquad -\frac{\partial V_t}{\partial t} = \int \frac{1}{r_t} \left[\zeta' \cos(n'n_t') - \zeta \cos(n\, n_t')\right] d\omega_t' .$$

Damit wir die Differentiation ausführen können, müssen wir den Integranden zunächst einmal umformen.

Es ist

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 ,$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} r_t^2 = r^2 + t\Big\{ & 2(x-x')\left[\zeta \cos(nx) - \zeta' \cos(nx')\right] \\ & +2(y-y')\left[\zeta \cos(ny) - \zeta' \cos(ny')\right] \\ & +2(z-z')\left[\zeta \cos(nz) - \zeta' \cos(nz')\right] \\ + t^2 \Big\{ & \zeta^2 + \zeta'^2 - 2\zeta\zeta' \cos(n\,n')\Big\} \\ = r^2 + m_1 t + m_2 t^2 , & \end{aligned}$$

wenn wir zur Abkürzung die geschweiften Klammern $= m_1$ bzw. $= m_2$ setzen.

Auf der Oberfläche von $G$ führen wir wieder Flächenkoordinaten $u$ und $v$ ein. Bekannte Sätze der Differentialgeometrie liefern dann

$$d\omega_t \cos(n_t x) = \left(\frac{\partial y_t}{\partial u}\frac{\partial z_t}{\partial v} - \frac{\partial y_t}{\partial v}\frac{\partial z_t}{\partial u}\right) du\, dv$$

$$d\omega_t \cos(n_t y) + \left(\frac{\partial z_t}{\partial u}\frac{\partial x_t}{\partial v} - \frac{\partial z_t}{\partial v}\frac{\partial x_t}{\partial u}\right) du\, dv$$

$$d\omega_t \cos(n_t z) = \left(\frac{\partial x_t}{\partial u}\frac{\partial y_t}{\partial v} - \frac{\partial x_t}{\partial v}\frac{\partial y_t}{\partial u}\right) du\, dv .$$

Die drei Klammerausdrücke sind Funktionaldeterminanten, für sie schreibt man kurz

$$\frac{\partial(y_t, z_t)}{\partial(u, v)} , \quad \frac{\partial(z_t, x_t)}{\partial(u, v)} , \quad \frac{\partial(x_t, y_t)}{\partial(u, v)} .$$

Aus diesen Gleichungen folgert man sofort die folgenden Relationen

$$d\omega_t = F(u, v)\, du\, dv \tag{4}$$

mit

$$F(u, v) = \sqrt{\left[\frac{\partial(y_t, z_t)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z_t, x_t)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x_t, y_t)}{\partial(u, v)}\right]^2},$$

$$\cos(n_t x) = \frac{\frac{\partial(y_t, z_t)}{\partial(u, v)}}{F(u, v)}, \quad \cos(n_t y) = \frac{\frac{\partial(z_t, x_t)}{\partial(u, v)}}{F(u, v)} \tag{5}$$

$$\cos(n_t z) = \frac{\frac{\partial(x_t, y_t)}{\partial(u, v)}}{F(u, v)}.$$

Die in (2′) vorkommenden Kosinusausdrücke ersetzen wir durch die Produktsummen der Richtungskosinus der einzelnen Richtungen. Soweit diese Richtungskosinus vom Parameter t abhängen, drücken wir sie nach (5) durch Funktionaldeterminaten aus. Setzen wir dann weiter die Ausdrücke (3) und (4) in (2′) ein, so findet man schließlich nach leichter Rechnung

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \int \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{m_1}{r^2}t + \frac{m_2}{r^2}t^2}} [\xi' \cos(n' x) - \xi \cos(nx)] \frac{\partial(y_t, z_t)}{\partial(u', v')} + [\zeta' \cos(n' y) - \zeta \cos(ny)] \frac{\partial(z_t, x_t)}{\partial(u' v')} + [\zeta, \cos(n' z) - \zeta \cos(nz)] \frac{\partial(x_t, y_t)}{\partial(u', v')} du'\, dv' \tag{6}$$

oder

$$\frac{\partial V^t}{\partial t} = \int \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{m_1}{r^2}t + \frac{m_2}{r^2}t^2}} S [\xi' \cos(n' x) - \zeta \cos(nx)] \frac{\partial(y_t, z_t)}{\partial(u', v')} du'\, dv', \tag{6′}$$

wo das S-Zeichen die Bedeutung eines Summenzeichens hat, wie man unmittelbar einsieht.

An die Umformung (6') knüpfen wir zwei Bemerkungen:

1. Bemerkung über die auftretenden Funktionaldeterminanten. Die im Integranden vorkommenden Funktionaldeterminanten sind in Bezug auf den Parametert t Funktionen zweiten Grades, wie man durch Ausrechnung bestätigt. Da die Ableitungen erster Ordnung der Deformation $\zeta$ auftreten, so müssen wir ihre Existenz voraussetzen.

2. Bemerkung über das Verhalten der Größen $\frac{m_1}{r^2}$ und $\frac{m_2}{r^2}$.

Man überzeugt sich leicht durch einfache Betrachtungen, daß die Größen $\frac{m_1}{r^2}$ und $\frac{m_2}{r^2}$ endlich bleiben, wenn die Punkte auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur $G$, deren Entfernung r ist, zusammenrücken; man hat nur vorauszusetzen, daß die Deformation überall endliche und stetige Ableitungen erster Ordnung hat. Diese Annahme mußten wir bereits oben machen. Ferner darf man, indem man die Deformation $\zeta$ hinreichend klein wählt, annehmen, daß der Ausdruck

$$\frac{m_1}{r^2}\ t + \frac{m_2}{r^2}\ t^2$$

für $0 \leqq t \leqq 1$ seinem absoluten Betrage nach kleiner als 1 wird, sodaß die Wurzel nie Null wird. Dazu hat man sich die Ausdrücke nur etwas näher anzusehen.

Jetzt ist die Differentation nach t im Ausdruck (6') durchführbar; durch n-maliges Differenzieren erhält man z. B. den $(n+1)$-ten Entwicklungskoeffizienten (Anwendung der Leibnizschen Produktformel). Wir wollen diese Rechnung hier nicht ausführen, für uns genügt es, ihre Durchführbarkeit eingesehen zu haben.

Nachdem wir gezeigt haben, daß die Entwicklungskoeffizienten der Reihe (1) existieren und sich wirklich berechnen lassen, müssen wir jetzt beweisen, daß die Reihe für $0 \leqq t \leqq 1$ konvergent ist und zwar gleichmäßig für alle Punkte der Oberfläche,

denn es sind ja die Koeffizienten Funktionen der Flächenkoordinaten u und v.

### b) Die Frage der Konvergenz der Reihenentwicklung.

Das übliche Verfahren, die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe nachzuweisen, besteht darin, für die betr. Reihe eine Majorante zu finden, welche konvergiert. Wir kommen hier aber schneller zum Ziele, wenn wir im Anschluß an Lichtenstein einige Kenntnisse der elementaren Funktionentheorie heranziehen. Dazu ist erforderlich, daß wir für t auch komplexe Werte zulassen müssen. Den Weg über das Komplexe gehen theoretische Astronomie und mathematische Physik oft, nur hat man sich bei der anschließenden Diskussion der Ergebnisse auf die reellen Werte zu beschränken.

Nach Riemann heißt bekanntlich eine Funktion regulär-analytisch innerhalb eines gewissen Gebietes, wenn sie in jedem Punkte dieses Gebietes eine Ableitung besitzt. Die Funktionentheorie zeigt dann, daß eine regulär-analytische Funktion in eine gleichmäßig konvergierende Potenzreihe entwickelt werden kann. Diese Potenzreihe ist identisch mit der Taylorreihe der Funktion.

Wir denken uns in der komplexen t-Ebene eine Umgebung des Punktes $t = 0$ abgegrenzt, und zwar soll diese Umgebung alle inneren Punkte einer gewissen Kreisfläche umfassen. Da t alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 einschließlich annehmen soll, so muß der Radius dieses Kreises größer als 1 sein. Nun ist der Ausdruck (6′) für alle u und v der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur $G$ analytisch-regulär in allen Punkten des Kreises, denn er besitzt dort eine Ableitung. Wir können ihn daher in eine Potenzreihe entwickeln

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{1!}\, t\, \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} + \frac{1}{2!}\, t^2\, \frac{\partial^3 V_t}{\partial t^3} + \dots,$$

durch gliedweise Integration derselben erhält man hieraus

$$V_t - V = t \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2!} t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} + \ldots .$$

Dies ist aber die Reihe (1). Für $t = 1$ erhält man die gesuchte Reihenentwicklung

$$V_1 - V = \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} + \ldots . \tag{7}$$

Wir wissen, daß der erste Koeffizient eine Form ersten Grades in $\zeta$ und $\zeta'$ ist. Bildet man die zweite Ableitung, so stellt sie sich dar als eine Form zweiten Grades in $\zeta$, $\zeta'$ und den beiden Ableitungen erster Ordnung, allgemein die n-te Ableitung als eine solche Form $n$-ten Grades. Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

> Die Differenz des Potentials in zwei entsprechenden Punkten von $G_1$ und $G$ ist in eine nach der Deformation $\zeta$ und ihren ersten Ableitungen fortschreitende Potenzreihe entwickelbar. Diese Reihe konvergiert immer (und zwar gleichmäßig für alle $u$ und $v$), wenn $\zeta$ eine mitsamt den ersten Ableitungen überall auf der Oberfläche von $G$ endliche und stetige Funktion darstellt, deren Absolut-Werte hinreichend klein sind.

An dieser Stelle zeigen wir, wie man unter der Annahme einer Reihenentwicklung nach Orthogonalfunktionen für die Deformation $\zeta$ die Reihe (7) in eine unendliche Reihe entwickeln kann, die nach Potenzen der Entwicklungskoeffizienten fortschreitet [7]).

## Reihenentwicklung für $V_1 - V$ nach der Methode von Schwarzschild.

Wir gehen aus von dem Ausdruck (6') und entwickeln $\zeta$ nach Orthogonalfunktionen $\eta_i$

---

[7]) K. Schwarzschild, loc. cit. [2]) S. 249 ff.

$$\zeta = \sum A_i \eta_i \quad .$$

Da es sich um kleine Deformationen handelt, so setzen wir mit Schwarzschild

$$\zeta = b \sum B_i \eta_i \ , \qquad A_i = b \ B_i \ ,$$

wo $b$ eine kleine Größe ist. Zunächst betrachten wir die Funktionaldeterminante $\frac{\partial (y_t, z_t)}{\partial (u', v')}$. Aus

$$y_t = y + t \zeta \cos (ny) = y + t b \sum_i B_i \eta_i \cos (ny)$$

folgt

$$\frac{\partial y_t}{\partial u'} = \frac{\partial y}{\partial u'} + t b \sum B_i \frac{\partial}{\partial u'} [\eta_i \cos (ny)] \ .$$

Bildet man genau so die anderen in der Funktionaldeterminante auftretenden Differentialquotienten und setzt dieselben ein, so folgt leicht

$$\frac{\partial (y_t , z_t)}{\partial (u', v')} = \frac{\partial (y, z)}{\partial (u', v')} + (t b M_1 + t b^2 M_2) \ ,$$

wo $M_1$ und $M_2$ unendliche Summen sind, deren erste nach den $B_i$ und deren zweite nach Quadraten und Produkten der $B_i$ fortschreitet. Weiter ersetzen wir in dem Ausdruck $[\zeta' \cos (n'x) - \zeta \cos (nx)] \zeta$ bzw. $\zeta'$ durch die Reihenentwicklung nach Orthogonalfunktionen. Zusammenfassend erhält man dann für

$$[\zeta' \cos (n'x) - \zeta \cos (nx)] \frac{\partial (y_t, z_t)}{\partial (u', v')}$$

einen Ausdruck von der folgenden Form

$$b N_1 + t b^2 N_2 + t^2 b^3 N_3 \ ,$$

wo $N_1$, $N_2$, $N_3$ wieder unendliche Summen sind, deren erste nach den $B_i$, deren zweite nach Quadraten und Produkten der $B_i$ und deren dritte nach Gliedern 3-ter Dimension in den $B_i$ fortschreitet. Durch Einsetzen erhält man dann

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{m_1}{r^2} t + \frac{m_2}{r^2} t^2}} \cdot$$

$$(b N_1 + t b^2 N_2 + t^2 b^3 N_3) \, du' \, dv' .$$

Um nun noch den Wurzelausdruck entwickeln zu können, setzen wir

$$\zeta = b h , \quad h = \sum B_i \eta_i ,$$

wo also h eine endliche und stetige Funktion des Ortes auf der Oberfläche von $G$ ist. Es ist dann

$$1 + \frac{m_1}{r^2} t + \frac{m_2}{r^2} t^2 = 1 + b \frac{n_1}{r^2} t + b^2 \frac{n_2}{r^2} t^2 .$$

Die Ausdrücke $n_1$ und $n_2$ sind genau so gebaut wie $m_1$ und $m_2$, nur steht in den ersteren an Stelle von $\zeta$ bzw. $\zeta' h$ bzw. $h'$. Wir setzen nun

$$\frac{1}{\sqrt{1 + b \frac{n_1}{r^2} t + b^2 \frac{n_2}{r^2} t^2}} = \frac{1}{(1 + q)^{\frac{1}{2}}} ,$$

wobei also

$$b \frac{n_1}{r^2} t + b^2 \frac{n_2}{r^2} t^2 = q$$

gesetzt ist. Nun ist die Entwicklung in die Binominalreihe

$$(1 + q)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{q}{2} + - \ldots .$$

für $|q| < 1$ gültig. Wählt man $b$ hinreichend klein, so kann man erreichen, daß $q$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 wird. Dann ist die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1 + b \frac{n}{r^2} t + b^2 \frac{n_2}{r^2} t^2}} = 1 + b t r_1 + b^2 t^2 r_2 + \ldots$$

konvergent. Hierin sind die $r_i$ ganze Funktionen von $\frac{n_1}{r^2}$ und

$\frac{n_2}{r^2}$. Setzt man wieder $h = \sum B_i \eta_i$, so gehen die $r_i$ in unendliche Summen über. Durch Einsetzen erhält man dann

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \int \frac{1}{r} (1 + b\,t\,r_1 + b^2 t^2 r_2 + \dots.)$$

$$(b\,N_1 + b^2\,t\,N_2 + b^3 t^2 N_3)\ d\,u'\ d\,v'$$

$$= \int \frac{1}{r} (b\,R_1 + b^2\,t\,R_2 + \dots)\ d\,u'\ d\,v' ,$$

wo die $R_i$ ähnliche Summen wie die $r_i$ sind. Es ist z. B.

$$R_3 = \sum\sum\sum B_i\ B_j\ B_k\ c_{ijk} ,$$

die $c_{ijk}$ sind ebenso wie die Entfernung $r$ Funktionen von $u$, $v$, $u'$, $v'$. Durch gliedweise Integration [8]) ergibt sich dann

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = b \int \frac{R_1}{r}\ d\,u'\,d\,v' + b^2\,t \int \frac{R_2}{r}\ d\,u'\ d\,v' + \dots ,$$

durch nochmalige gliedweise Integration folgt endlich

$$V_t - V = b\,t \int \frac{R_1}{r}\ d\,u'\ d\,v' + \frac{b^2\,t^2}{2} \int \frac{R_2}{r}\ d\,u'\ d\,v' + \dots$$

und speziell für $t = 1$

$$V_1 - V = b \int \frac{R_1}{r}\ d\,u'\ d\,v' + \frac{b_2}{2} \int \frac{R_2}{r}\ d\,u'\ d\,v' + \dots$$

$$= b \sum B_i\ d_i + b^2 \sum\sum B_i\ B_j\ d_{ij} + \dots ,$$

wo

$$d_i = \int \frac{c_i}{r}\ d\,u'\ d\,v' , \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \int \frac{c_{ij}}{r}\ du'\ dv' , \dots$$

gesetzt ist. Die $d_i$, $d_{ij}$, ... sind Funktionen von $u$, $v$. Setzen wir wieder $A_i = b\,B_i$, so erhalten wir schließlich

[8]) Hier ist eine Lücke in der Betrachtung, denn die gliedweise Integration setzt gleichmäßige Konvergenz der Reihe voraus, die erst nachgewiesen werden müßte. Über diese Lücke geht Schwarzschild stillschweigend hinweg (loc. cit [2]) S. 252).

$$V_1 - V = \sum A_i\, d_i + \sum\sum A_i\, A_i\, d_{ij} + \ldots\ ,$$

d. h. eine Reihenentwicklung für $V_1 - V$, die nach Potenzen der Entwicklungskoeffizienten $A_i$ fortschreitet. Schwarzschild selber entwickelt nicht $V_1 - V$ in eine Reihe, sondern die Differenz der potentiellen Energie $W_1 - W$, da sein Ausgangspunkt die Gleichgewichtsbedingung $(B)$ ist.

Nach dieser Zwischenbetrachtung kehren wir zur Reihenentwicklung (7) zurück. Aus den beiden Bedingungen (1) und (2) des § 1

$$V + \frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2) = C$$

$$V_1 + \frac{1}{2}\,\omega_1^2\,(x_1^2 + y_1^2) = C_1$$

folgt durch Subtraktion

$$V_1 - V + \frac{1}{2}\,\omega_1^2\,(x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2) = C_1 - C = C_2$$

oder, wenn man die Reihenentwicklung (7) einführt,

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} + \cdots + \frac{1}{2}\,\omega_1^2\,(x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2) = C_2\ .$$

Wir setzen wieder $C_2 = 0$. Wie im § 1 drücken wir $x_1, y_1, z_1$ durch $x, y, z$ und $\zeta$ aus und machen die Substitution $\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2} = \lambda$. Man bekommt dann nach leichter Rechnung

(8)
$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2 V_t}{\partial t} + \ldots + (x^2 + y^2)\,\lambda + [\cos^2(nx) + \cos^2(ny)]\,\zeta^2\,\lambda + \frac{\omega^2}{2}\,[\cos^2(nx) + \cos^2(ny)]\,\zeta^2 + 2\,\lambda\lambda\,[\cos(nx) + y\cos(ny)] + \omega^2\,\zeta\,[x\cos(nx) + y\cos(ny)] = 0.$$

Zu der Potenzreihe sind also noch einige in $\zeta$ lineare und quadratische Glieder hinzugekommen. Bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung (8) mit $P(\zeta; \lambda)$, so ist unsere Aufgabe jetzt wie folgt zu formulieren: Es ist bei gegebenem Parameterwert $\lambda$ die Deformation $\zeta(u, v)$ so zu bestimmen, daß identisch in $u, v$ die Gleichung

$$P[\zeta(u, v); \lambda] = 0 \tag{8'}$$

erfüllt wird. Die Gleichung (8') nennen wir die Fundamentalgleichung des Problems. Der folgende Paragraph soll eine kurze Diskussion der Fundamentalgleichung bringen.

## *§ 4. Diskussion der Fundamentalgleichung.*

Da die Deformation $\zeta$ nebst ihren Ableitungen erster Ordnung unter dem Integralzeichen vorkommt, nennt man die Gleichung (8) bzw. (8') eine Integrodifferentialgleichung, genauer eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung. Der bekannte Bericht von Hellinger und Toeplitz über Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Veränderlichen in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (Bd. II, 3) sagt über den Problemkreis der Integrodifferentialgleichungen folgendes: „Eine methodische Durcharbeitung des außerordentlich vielgestaltigen Problemkreises liegt naturgemäß nicht vor. Die einfache Bemerkung, daß die Integrodifferentialgleichungen alle Arten von Integralgleichungen und Differentialgleichungen als Sonderfälle enthalten, zeigt, mit welchen verschiedenen Fragestellungen man an sie herantreten kann."

Wir betrachten zunächst eine gewöhnliche nichtlineare nach $x$ aufzulösende Gleichung

$$F(x, y) = 0.$$

Sie besitzt in der Umgebung einer Lösung genau eine Lösung, wenn der partielle Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ ist. Im andern Fall treten Verzweigungen auf. Man vermutet nun, daß auch der

Lösbarkeitscharakter unserer nichtlinearen Integrodifferentialgleichung in der Umgebung der vorgegebenen Gleichgewichtsfigur $G$ von einer abgeleiteten linearen homogenen Integralgleichung abhängt. Besitzt dieselbe keine nichttrivialen Lösungen, so ist die nichtlineare Integrodifferentialgleichung in der Umgebung der vorgegebenen Lösung eindeutig auflösbar. Im anderen Falle treten Verzweigungen ein.

Die abgeleitete homogene lineare Integralgleichung ist natürlich identisch mit der früheren homogenen Gleichung

$$-g\zeta + \int \frac{\zeta'}{r} d\omega' = 0.$$

Wir wissen bereits, daß diese Gleichung zwei triviale Lösungen hat, die wir nicht zu berücksichtigen brauchen. Wir nehmen an daß sie keine nichttriviale Lösung habe; es ist dann zu zeigen, daß die Fundamentalgleichung eindeutig auflösbar ist. Diese Aufgabe stellen wir uns gleich in der folgenden Form:

a) Aus einer einzelnen vorgegebenen Gleichgewichtsfigur eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren abzuleiten.

Es handelt sich also darum zu zeigen, daß es für jeden dem Werte $\lambda = 0$ hinreichend benachbarten Wert von $\lambda$ eine und nur eine Lösung $\zeta$ gibt. Die linke Seite der Fundamentalgleichung spalten wir auf in einen Teil, der nur die linearen Glieder in $\zeta$ und $\zeta'$ enthält, und in den übrigen Teil, also

$$-g\zeta + \int \frac{\zeta'}{r} d\omega' + P_1(\zeta, \lambda) = 0 .$$

In $P_1(\zeta, \lambda)$ kommt ein Glied ersten Grades in $\lambda$ und nullten Grades in $\zeta$ vor, auch dieses trennen wir noch ab und bekommen

$$-g\zeta + \int \frac{\zeta'}{r} d\omega' = -\lambda(x^2 + y^2) - P_2(\zeta, \lambda) .$$

Der Parameter $\lambda$ ist vorgegeben. Wir lösen diese Gleichung mittels des Verfahrens der sukzessiven Näherungen. Als erste Näherung $\zeta_0$ wählen wir die Funktion

$$- g\,\zeta_0 = - \lambda\,(x^2 + y^2)\ .$$

Aus dieser wohlbestimmten Funktion bilden wir sukzessive die folgenden Näherungen

$$- g\,\zeta_1 = - \lambda\,(x^2 + y^2) - \int \frac{\zeta'_0}{r}\,d\,\omega' - P_2\,(\zeta_0, \lambda)$$

$$- g\,\zeta_2 = - \lambda\,(x^2 + y^2) - \int \frac{\zeta'_1}{r}\,d\,\omega' - P_2\,(\zeta_1, \lambda)$$

$$\vdots$$

$$- g\,\zeta_{n+1} = - \lambda\,(x^2 + y^2) - \int \frac{\zeta'_n}{r}\,d\,\omega' - P_2\,(\zeta_n, \lambda)\ .$$

So fahren wir fort und wiederholen das Verfahren so lange, bis praktisch

$$\zeta_n = \zeta_{n+1} = \zeta$$

geworden ist. Mathematisch gesprochen heißt dies: Wir hoffen, daß das Verfahren konvergiert, daß also

$$\lim_{n \to \infty} \zeta_n = \zeta\ .$$

In der Tat beweist Lichtenstein, daß das Verfahren konvergiert und daß die so gewonnene Lösung die einzige ist. Für den Astronomen genügt es zu wissen, daß die Mathematik die Konvergenz des Verfahrens zu beweisen vermag (man vergl. auch die analogen Bemerkungen Schwarzschilds auf S. 259 seiner mehrfach zitierten Arbeit). Die Lösung $\zeta$ stellt sich dar als eine Funktion des Parameters $\lambda$, also $\zeta = f\,(\lambda)$, d. h. zu einem bestimmten $\lambda =$ Werte gibt es eine Deformation $\zeta$, mithin eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren.

Jetzt nehmen wir an, die homogene Integralgleichung besitze eine nichttriviale Lösung. Es ist dann zu zeigen, daß Verzweigungen eintreten. Diese Aufgabe stellen wir uns in der folgenden Form:

b) Aus einer einzelnen vorgegebenen Gleichgewichtsfigur neue Reihen von Gleichgewichtsfiguren abzuleiten.

Wir bezeichnen die nichttriviale Lösung der homogenen symmetrischen Gleichung

$$\varrho - \int \frac{\varrho'}{\sqrt{g}\ \sqrt{g'}\ r}\, d\omega' = 0$$

mit $\bar{\varrho}$. Zufolge eines Satzes von Erh. Schmidt (Math. Annalen Bd. 65, S. 386—89) [9]) können wir den Kern dieser homogenen Gleichung so transformieren, daß die zugehörige neue Integralgleichung keine Lösung mehr besitzt. Definieren wir eine neue Funktion $E$ durch die Gleichung

$$E = \frac{1}{\sqrt{g}\ \sqrt{g'}\ r} - \bar{\varrho}\,\bar{\varrho}' ,$$

so hat zufolge dieses Theorems die Gleichung

$$\varrho - \int \varrho' E\, d\omega' = 0$$

bzw. die Gleichung

---

[9]) Das Theorem können wir für den Fall einer linear unabhängigen Lösung $\varphi_1$ der symmetrischen Integralgleichung

$$\varphi(s) - \int C(s,t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

wie folgt formulieren: Bezeichnet $p_1(s)$ eine so gewählte stetige Funktion, daß

$$\int \varphi_1(r)\, p_1(r)\, dr \neq 0$$

ist, und setzt man

$$E(s,t) = C(s,t) + p_1(s)\, p_1(t) ,$$

so hat die Integralgleichung

$$\varphi(s) - \int E(s,t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

keine Lösung mehr. Wählt man nun $p_1 = \varphi_1$, so ist

$$\int \varphi_1^2\, dr \neq 0 ,$$

da andernfalls $\varphi_1 \equiv 0$ folgen würde.

$$-g\zeta + \int \sqrt{g}\,\sqrt{g'}\,E\,\zeta'\,d\omega' = 0$$

keine nichttriviale Lösung mehr.

Setzt man nun in der Fundamentalgleichung

$$\frac{1}{r} = \sqrt{g}\,\sqrt{g'}\;E + g\bar{\xi}\;g'\bar{\xi}',$$

so bekommt man

$$-g\zeta + \int E\sqrt{g}\,\sqrt{g'}\,\zeta'\,d\omega' + g\bar{\xi}\int g'\,\bar{\xi}'\,\zeta'\,d\omega'$$
$$= -\lambda\,(x^2+y^2) - P_2\,(\zeta\,,\,\lambda)$$

oder

$$-g\zeta + \int E\sqrt{g}\,\sqrt{g'}\,\zeta'\,d\omega' = -g\bar{\xi}\,r - \lambda(x^2+y^2) - P_2\,(\zeta,\lambda),$$

wo also

$$r = \int g'\,\bar{\xi}'\,\zeta'\;d\omega'$$

gesetzt ist. Diese Größe *r* fassen wir zunächt als unbestimmten Parameter auf und setzen seinen Wert als bekannt voraus. Auf die Integrodifferentialgleichung

$$-g\zeta + \int E\sqrt{g}\,\sqrt{g'}\,\zeta'\,d\omega' = -g\bar{\zeta}\,r - \lambda\;(x^2+y^2) - P_2\,(\zeta,\lambda)$$

können wir genau wie oben das Verfahren der sukzessiven Näherungen anwenden, indem wir etwa setzen

$$-g\zeta_0 = -g\bar{\zeta}\,r - \lambda\;(x^2+y^2)$$
$$-g\zeta_1 = -g\bar{\zeta}\,r - \lambda\;(x^2+y^2)$$
$$-\int E\sqrt{g}\,\sqrt{g'}\,\zeta'_0\,d\omega' - P_2\,(\zeta_0,\lambda)$$
$$\vdots$$
$$-g\zeta_{n+1} = -g\bar{\zeta}\,r - \lambda\;(x^2+y^2)$$
$$-\int E\sqrt{g}\,\sqrt{g'}\,\zeta'_n\,d\omega' - P_2\,(\zeta_n,\lambda).$$

Wir fahren so fort, bis wieder praktisch

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n = \zeta$$

geworden ist. Die so erhaltene Lösung enthält aber noch den unbestimmten Parameter $r$, den wir jetzt hinterher wie folgt ermitteln können: Durch die Substitution $\varrho = \sqrt{g}\ \zeta$ geht die Fundamentalgleichung über in

$$\varrho - \int \frac{\varrho'}{\sqrt{g}\sqrt{g'}\,r}\, d\omega' = -\frac{1}{\sqrt{g}} P_1\left(\frac{\varrho}{\sqrt{g}}, \lambda\right).$$

Der Parameter $r$ läßt sich nun aus der Orthogonalitätsbedingung

$$\int \varrho' \frac{1}{\sqrt{g'}} P_1\left(\frac{\varrho'}{\sqrt{g'}}, \lambda\right) d\omega' = 0$$

oder

$$\int \sqrt{g'}\,\zeta' \frac{1}{\sqrt{g'}} P_1(\zeta', \lambda)\, d\omega' = \int \zeta' P_1(\zeta', \lambda)\, d\omega' = 0$$

bestimmen, indem man sich für $\zeta'$ die von $\lambda$ und $r$ abhängige Lösung eingetragen denkt. Man erhält dann eine Bedingungsgleichung für die Konstante $r$ in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda$

$$f(r, \lambda) = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung heißt die Verzweigungsgleichung unseres Problems. Da in $P_1(\zeta, \lambda)$ kein in $\zeta$ lineares Glied vorkommt, so enthält die Verzweigungsgleichung kein in $r$ lineares Glied. Die Verzweigungsgleichung hat dann diese Gestalt

$$\begin{aligned} &a_{10}\lambda + (a_{20}\lambda^2 + a_{11}\lambda r + a_{02} r^2) \\ &\quad + (a_{30}\lambda^3 + a_{21}\lambda^2 r + a_{12}\lambda r^2 + a_{30} r^3) \\ &\quad + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nach $r$ aufzulösen. Es seien einige besonnere Fälle herausgegriffen:

1. $a_{10} \neq 0$, $a_{02} \neq 0$. Wir dividieren die Verzweigungsgleichung durch $a_{02}$ und erhalten

$$\frac{a_{10}}{a_{02}}\lambda + \frac{a_{20}}{a_{02}}\lambda^2 + \frac{a_{11}}{a_{02}}\lambda r + r^2 + \ldots = 0 .$$

Diese Gleichung läßt wegen des Fehlens des in $r$ linearen Gliedes zwei Auflösungen zu

$$r_1 = \sqrt{-\frac{a_{10}}{a_{02}}\lambda + \mathfrak{P}(\lambda)}$$

$$r_2 = \sqrt{-\frac{a_{10}}{a_{02}}\lambda + \mathfrak{P}(\lambda)} ,$$

wo $\mathfrak{P}(\lambda)$ eine Potenzreihe in $\lambda$ bedeutet. Ist $-\frac{a_{10}}{a_{02}}$ größer als 0, dann gibt es nur für $\lambda > 0$ reelle Wurzeln. Für $r$ hat man diese beiden Wurzeln in die Lösung für $\zeta$ einzutragen und erhält dann zum selben Wert von $\lambda$ zwei Deformationen $\zeta$. Dieses Ergebnis können wir folgendermaßen formulieren: in der gegebenen Gleichgewichtsfigur treffen zwei lineare Reihen zusammen, die zu kleinen positiven Werten von $\lambda$ oder, anders formuliert, die zu wachsendem $\omega$ gehören, sie werden aber, wenn man zu abnehmendem $\omega$ übergeht, imaginär. Es gehen also zwei Arme von $G$ aus, d. h. $G$ ist eine Grenzfigur.

2. $a_{10} = 0$, $a_{02} \neq 0$. Die Gleichung

$$a_{20}\lambda^2 + a_{12}\lambda r + a_{02} r^2 + \ldots = 0$$

hat die beiden folgenden Lösungen

$$r_1 = \frac{1}{2\,a_{02}}\left(-a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 - 4\,a_{02}\,a_{20}}\right)\lambda + \mathfrak{P}(\lambda)$$

$$r_2 = \frac{1}{2\,a_{02}}\left(-a_{11} - \sqrt{a_{11}^2 - 4\,a_{02}\,a_{20}}\right)\lambda + \mathfrak{P}(\lambda).$$

Wir nehmen an, der Radikand sei größer als 0, dann sind die beiden Wurzeln reell. Es gibt wieder zwei Lösungen für $\zeta$. Wir formulieren das Ergebnis folgendermaßen: Die vorgegebene Gleichgewichtsfigur gehört zwei linearen Reihen an, sie ist daher eine Verzweigungsfigur. Man findet in der Tat für jeden positiven

oder negativen Wert von $\lambda$, der hinreichend klein ist, zwei Gleichgewichtsfiguren, die nur unendlich wenig von der Ausgangsfigur $G$ verschieden sind.

Man kann nun so fortfahren und mehrere nichttriviale Lösungen der homogenen Gleichung annehmen. Eine Diskussion solcher Fälle findet man bei Lichtenstein.

## Zusammenfassung.

In der Einleitung wurde das Existenztheorem von Gleichgewichtsfiguren formuliert.

Im ersten Teil wurde versucht, dies Theorem zu beweisen unter Beschränkuung auf eine erste Näherung für die Deformation entsprechend den speziellen Poincaré'schen Untersuchungen über benachbarte Gleichgewichtsfiguren der Ellipsoide. Es zeigte sich, daß eine erste Näherung keine bestimmten Aussagen zu machen gestattet im singulären Fall.

Im zweiten Teil wurde eine vollständige Reihenentwicklung für das Potential der deformierten Figur durchgeführt und zwar in durchsichtigerer Weise als in den Lichtensteinschen Arbeiten. Es wurde dabei auch auf den Zusammenhang mit den entsprechenden Entwicklungen von Schwarzschild hingewiesen. Durch die Reihenentwicklung wurde das Existenzproblem zurückgeführt auf eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung, die aber nur grundsätzlich diskutiert wurde, da eine ausführliche Diskussion bereits durchgeführt worden ist.

---

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. Kohlschütter für das rege Interesse, das er der Arbeit angedeihen ließ, meinen Dank aussprechen.

## Lebenslauf.

Ich, Wilhelm Trippe, wurde am 22. März 1912 zu Dortmund-Kirchlinde geboren. Mein Vater heißt Wilhelm, meine Mutter Emma; sie ist eine geborene Erlenbauer. Durch die Taufe wurde ich in die Evangelische Kirche aufgenommen.

Die Reifeprüfung legte ich Ostern 1932 auf der Städtischen Oberrealschule zu Dortmund ab. Ich studierte darauf 2 Semester in Marburg und 6 Semester in Bonn Mathematik, Physik, Astronomie und Philosophie. Dann fertigte ich die Dissertation an Die mündliche Prüfung bestand ich am 23. Febr. 1938.